DM : Suites récurrentes

Suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Soient I un intervalle fermé non vide de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

Partie 1 : Généralités

1. Soit J un intervalle tel que $J \subset I$ et stable par f (i.e $f(J) \subset J$). Montrer que si $u_0 \in J$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$.
2. On suppose que I est stable par f et f est croissante sur I.
   (a) Montrer que :
   Si $f(u_0) - u_0 \geq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (b) Montrer que :
   Si $f(u_0) - u_0 \leq 0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. On suppose que I est stable par f et f est décroissante sur I.
   Montrer que les suites extraites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ sont monotones et de monotonie contraire.
4. On suppose que $u_0 \in I$, I est stable par f et f est continue sur I.
   Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ vérifie $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.
   (On dit que ℓ est un point fixe de f).
5. Soit $f : I \to I$ une application contractante.
   Montrer que si f admet un point fixe ℓ alors ℓ est unique et toute suite définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ converge vers ℓ.

Partie 2 : Applications

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n e^{-u_n} \end{cases}$.
   (a) Étudier la convergence de cette suite selon $u_0 \in \mathbb{R}$.
   (b) On suppose que $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$.
   On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   En utilisant le théorème de Cèsarò, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = 1$
2. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n) \end{cases}$.
3. Étudier la suite de terme général : $u_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}}}_{n \text{ termes}}$.